3 Algebraische Fundamentalgruppe

In diesem Kapitel wird Grothendiecks Konstruktion einer Fundamentalgruppe für Schemata vorgestellt und die Gruppe in einem für uns interessanten Spezialfall berechnet. Das Ergebnis liefert die Grundlage für die Gegenüberstellung von Topologie und Zahlentheorie im nächsten Kapitel.

3.1 Motivation: Die topologische Fundamentalgruppe

Die Fundamentalgruppe eines topologischen Raums X wird üblicherweise definiert als die Gruppe der Homotopieklassen von Schleifen $S^1 \to X$ mit fest gewähltem Basispunkt, wobei sich die Gruppenstruktur durch Zusammensetzen von Schleifen ergibt.

Falls X ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semilokal einfach zusammenhängender topologischer Raum ist, kann man mit Hilfe der universellen Überlagerung eine weitere Beschreibung der Fundamentalgruppe finden, die den Vorteil hat, dass sie sich auf die algebraische Geometrie übertragen lässt.

Die universelle Überlagerung $(\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ des Raums X mit Basispunkt x kann durch die folgende universelle Eigenschaft charakterisiert werden:

Für jede zusammenhängende Überlagerung $Y \xrightarrow{p} X$ und jeden Punkt $y \in p^{-1}(x)$ gibt es einen eindeutigen Morphismus von Überlagerungen $\tilde{X} \to Y$, der $\tilde{x}$ auf y abbildet. Anders ausgedrückt gibt es einen funktoriellen Isomorphismus

$$p^{-1}(x) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_X(\tilde{X}, Y).$$

Die Automorphismengruppe der universellen Überlagerung über X ist kanonisch isomorph zu ihrer Decktransformationsgruppe, und diese ist wiederum kanonisch isomorph zur Fundamentalgruppe des Raums X. Insgesamt kann man $\pi_1(X, x)$ definieren als Automorphismengruppe desjenigen Objekts in der Kategorie $\mathrm{Cov}_{(X,x)}$ der zusammenhängenden Überlagerungen von X, das den Funktor

$$\begin{array}{rcrcl} F & : & \mathrm{Cov}_{(X,x)} & \to & \mathit{Ens} \\ & & (Y \xrightarrow{p} X) & \mapsto & p^{-1}(x) \end{array}$$

(co-)darstellt.

3.2 Stetige Abbildungen und lokale Homöomorphismen

Um Überlagerungen auf die algebraische Geometrie zu übertragen, braucht man Entsprechungen für Begriffe wie Stetigkeit und lokale Homöomorphismen. Für beide Eigenschaften von Abbildungen liefert die Zariski-Topologie keine geeigneten Ergebnisse. Stattdessen hat sich herausgebildet, dass die „richtigen“ Abbildungen durch flache und unverzweigte Morphismen gegeben sind. Die zwei folgenden kurzen Beispiele sollen diese Wahl motivieren:

Eine Familie von Schemata ist gegeben durch einen Morphismus $\pi : X \to B$ von Schemata. Die einzelnen Schemata in der Familie sind dann die Fasern des Morphismus. Die Familie heißt flach, wenn der Morphismus π flach ist. Flache Familien haben die Eigenschaft, dass die Fasern in einem gewissen Sinn „stetig variieren“. Als **Beispiel** nennen wir den folgenden Satz ([14], Chapter III, Corollary 9.6):

Satz 3.1. *Sei $f : X \to Y$ ein flacher Morphismus von Schemata X, Y von endlichem Typ über dem Körper k und Y außerdem irreduzibel. Falls jede irreduzible Komponente von X die Dimension $n + \dim Y$ hat, gilt für jeden Punkt $y \in Y$: Jede irreduzible Komponente der Faser $X_y = X \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(y)$ hat die Dimension n.*

Unverzweigte Morphismen kann man sich als Analogon zu lokal trivialen Abbildungen vorstellen:

Beispiel 3.2. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\varphi : k[T] \to k[X]$ die Abbildung $T \mapsto X^2$. Die abgeschlossenen Punkte von $k[T]$ entsprechen Idealen der Form $(T - a)$, und die Urbilder eines Punkts $(T - a^2)$ unter der Abbildung $\operatorname{Spec} \varphi : \operatorname{Spec} k[X] \to \operatorname{Spec} k[T]$ sind die Ideale $(X - a)$ und $(X + a)$, falls $a \neq 0$, sonst nur der Punkt (X). Wir stellen uns diese Situation vor wie in Abbildung 11 dargestellt.

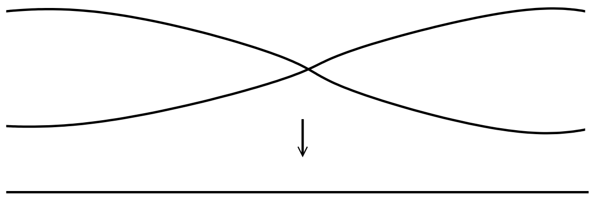

Abbildung 11: Verzweigung

Hier sieht der Morphismus bei allen Punkten aus $\operatorname{Spec} k[X]$ außer (X) aus wie ein lokaler Homöomorphismus, auch wenn die Zariski-Topologie – wie schon bemerkt – nicht die geeignete Topologie ist, da es keine Zariski-Umgebung eines Punktes $(X - a)$ gibt, sodass die Einschränkung injektiv ist. Der einzige Punkt, bei dem hier Verzweigung auftritt, ist der Punkt (X).

3.3 Unverzweigte und étale Morphismen

In diesem Abschnitt, der die für uns wichtigen Aussagen aus [29], § I.3 enthält, definieren wir unverzweigte und étale Morphismen und stellen einige Eigenschaften zusammen, um im nächsten Abschnitt die étale Fundamentalgruppe einführen zu können. Wir nehmen im Folgenden an, dass alle Ringe noethersch sind und alle Morphismen lokal von endlichem Typ.

Definition. Seien $(A, \mathfrak{m}_A)$ und $(B, \mathfrak{m}_B)$ lokale Ringe und $f : A \to B$ ein lokaler Homomorphismus. f heißt unverzweigt, falls $f(\mathfrak{m}_A)$ das maximale Ideal von B erzeugt und falls die Körpererweiterung $A/\mathfrak{m}_A \subset B/\mathfrak{m}_B$ endlich und separabel ist.

Ein Homomorphismus $f : A \to B$ zwischen beliebigen Ringen heißt unverzweigt, falls für jedes Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ die Lokalisierung $A_{f^{-1}(\mathfrak{q})} \to B_{\mathfrak{q}}$ unverzweigt ist.

Bemerkung. Für die Ganzheitsringe von Zahlkörpern stimmt diese Definition von „unverzweigt bei einem Primideal $\mathfrak{p}$“ mit der Definition überein, die man aus der Zahlentheorie kennt.

Satz 3.3. *Eine endlich erzeugte Algebra A über einem Körper K ist genau dann unverzweigt über K, wenn sie endliches Produkt von endlichen separablen Körpererweiterungen von K ist.*

Beweis. Jede endlich erzeugte Algebra dieser Form ist offenbar unverzweigt über k. Umgekehrt: Sei A unverzweigt über K. Da das maximale Ideal jeder Lokalisierung $A_{\mathfrak{p}}$ von A von

(0) erzeugt wird, ist jede Lokalisierung von A nach einem Primideal ein Körper, und alle Primideale sind damit maximal.

Sei N das Nilradikal von A. Dann ist $N_{\mathfrak{p}} = 0$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$, also $N = 0$. Nach dem chinesischen Restsatz ist $A = \Pi A/\mathfrak{p} = \Pi K_i$ ein Produkt von Körpern.

Für die Homomorphismen $K \to K_i$ folgt nun sofort aus der Definition, dass sie genau dann unverzweigt sind, wenn K_i separabel über K ist. $\square$

Definition. Sei $f : Y \to X$ ein Morphismus von Schemata von endlichem Typ. f heißt unverzweigt bei $y \in Y$, wenn der lokale Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{X,f(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ unverzweigt ist. Der Morphismus heißt unverzweigt, wenn er an jedem Punkt unverzweigt ist.

Bemerkung. Ein Morphismus zwischen affinen Schemata ist also genau dann unverzweigt, wenn der entsprechende Ringhomomorphismus unverzweigt ist.

Satz 3.4. *Ein Morphismus $f : Y \to X$ von endlichem Typ ist genau dann unverzweigt, wenn die Faser $Y_x \to \operatorname{Spec} \kappa(x)$ für jedes $x \in X$ unverzweigt ist.*

Beweis. Für den lokalen Ring $\mathcal{O}_{Y_x,y}$ an dem Punkt, der einem über x liegenden Punkt $y \in Y$ entspricht, gilt $\mathcal{O}_{Y_x,y} \cong \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_{X,x}\mathcal{O}_{Y,y}$. Die Ringerweiterung $\kappa(x) \to \mathcal{O}_{Y_x,y}$ ist genau dann unverzweigt, wenn $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ unverzweigt ist. $\square$

Satz 3.5. *a) Offene Immersionen sind unverzweigt.*

b) Zusammensetzungen von unverzweigten Morphismen sind unverzweigt.

c) Jeder Basiswechsel eines unverzweigten Morphismus ist unverzweigt.

Beweis. Die ersten beiden Behauptungen sind klar. Für die dritte Behauptung reicht es nach Satz 3.4, einen Morphismus der Form $X \to \operatorname{Spec} K$ und den Basiswechsel mit $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} K$ für eine beliebige Körpererweiterung $L \supset K$ zu betrachten. Außerdem können wir annehmen, dass X affin ist.

Falls $X = \operatorname{Spec} A$, ist A nach Satz 3.3 endliches Produkt von endlichen separablen Körpererweiterungen K_i von K. Es gilt also $A = \Pi K[T]/(f_i(T))$ mit irreduziblen Polynomen f_i, sodass $(f_i, f_i') = 1$. Dann ist $L \otimes_K A = \Pi L[T]/(f_i(T))$, und jeder Faktor ist wieder Produkt von endlich vielen separablen Körpererweiterungen von L. Damit ist $L \otimes_K A$ separable L-Algebra. $\square$

Satz 3.6. *Sei $f : Y \to X$ von endlichem Typ. f ist genau dann unverzweigt, wenn der Diagonalmorphismus $\Delta : Y \to Y \times_X Y$ eine offene Immersion ist.*

Beweis. Wir benötigen nur die Richtung „ $\Rightarrow$ “; ein Beweis für die andere Implikation findet sich in [29], Proposition 3.5.

Sei f also unverzweigt. Da die Diagonalabbildung immer lokal abgeschlossene Immersion ist, können wir eine offene Teilmenge W von $Y \times_X Y$ wählen, sodass $i : Y \to W$ eine abgeschlossene Immersion ist. Sei $\mathcal{I}$ der Kern der Abbildung $i^\sharp : \mathcal{O}_W \to i_*\mathcal{O}_Y$. Um zu zeigen, dass die Diagonale eine offene Immersion ist, reicht es zu zeigen, dass die lokalen Ringe $\mathcal{I}_y$ für alle Punkte y im Bild von Y verschwinden, da dann $\mathcal{I} = 0$ auf einer offenen Teilmenge V von W, die Y enthält. Daraus folgt dann $Y = V$ als Unterschemata von W, und Y ist offenes Unterschema von W und damit auch von $Y \times_X Y$.

Die Garbe $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ ist als Garbe auf Y isomorph zu der Garbe $\Omega_{Y/X}$ der Differentiale auf Y.[3] Um zu zeigen, dass $\mathcal{I}_y$ verschwindet, reicht es nach Nakayama, zu zeigen, dass $\mathcal{I}_y/\mathcal{I}_y^2 = (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)_y = 0$.

Da man die Garbe der Differentiale erhält, wenn man die entsprechenden Garben für affine Überdeckungen von X und Y zusammenklebt, können wir annehmen, dass $X = \operatorname{Spec} A$ und $Y = \operatorname{Spec} B$ affin sind und $\Omega_{Y/X} = \widetilde{\Omega_{B/A}}$. Sei $(\Omega_{Y/X})_y$ die Lokalisierung am Punkt y, der dem Primideal $\mathfrak{q}$ von B entspricht, und $\mathfrak{p}$ das zugehörige Primideal in A. Dann ist $(\Omega_{Y/X})_y \cong (\Omega_{B/A})_\mathfrak{q} \cong \Omega_{B_\mathfrak{q}/A} = \Omega_{B_\mathfrak{q}/A_\mathfrak{p}}$.

Seien $K = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ und $L = B_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}B_\mathfrak{q}$ die Restklassenkörper in den Punkten $[\mathfrak{p}]$ und $[\mathfrak{q}]$.

Es gilt $L = K \otimes_{A_\mathfrak{p}} B_\mathfrak{q}$, da $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{q}$ unverzweigt ist, und $\Omega_{L/K} = \Omega_{B_\mathfrak{q}/A_\mathfrak{p}} \otimes_{B_\mathfrak{q}} L$. Dieser Modul verschwindet, da die Körpererweiterung $L \supset K$ endlich und separabel ist. Damit gilt nach Nakayama auch $\Omega_{B_\mathfrak{q}/A_\mathfrak{p}} = 0$. □

Definition. Ein Morphismus von endlichem Typ heißt étale, wenn er flach und unverzweigt ist. Er heißt étale Überlagerung, wenn er zusätzlich endlich ist.

Bemerkung. Für zwei S-Schemata X und Y und einen S-Morphismus $f : X \to Y$ ist der Graph von f die Abbildung

$$\Gamma_f : X \xrightarrow{1\times f} X \times_S Y,$$

die man auch durch Basiswechsel mit f aus der Diagonalabbildung $\Delta : Y \to Y \times_S Y$ erhält.

Satz 3.7. *Seien $f : X \to S$ und $g : Y \to X$ zwei Morphismen von endlichem Typ. Falls f unverzweigt ist und die Zusammensetzung von f und g étale, so ist auch g étale.*

Beweis. Der Morphismus g setzt sich zusammen aus dem Graph Γ_g und der Projektion $p_2 : Y \times_S X \to X$ auf den zweiten Faktor. Nach Satz 3.6 ist die Diagonalabbildung $\Delta_{X/S} : X \to X \times_S X$ offene Immersion, also étale. Der Morphismus Γ_g ergibt sich durch Basiswechsel von $\Delta_{X/S}$ mit $g \times 1 : Y \times_S X \to X \times_S X$ und ist damit étale. Genauso ist die Projektion p_2 als Basiswechsel des étalen Morphismus $fg : Y \to S$ étale. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 3.8. *Eine abgeschlossene Immersion ist genau dann flach, wenn sie gleichzeitig offene Immersion ist.*

Beweis. [29], Chapter I, Proposition 3.10. □

Satz 3.9. *Sei X zusammenhängend und $f : Y \to X$ étale und separiert. Dann ist jeder Schnitt von f ein Isomorphismus auf eine Zusammenhangskomponente von Y. Insbesondere ist ein Schnitt von f festgelegt durch seinen Wert an einem Punkt.*

Beweis. Sei s ein Schnitt von f, also $fs = 1$. Dann ist s abgeschlossene Immersion, denn s ergibt sich aus der abgeschlossenen Immersion $\Delta : Y \to Y \times_X Y$ durch Basiswechsel mit $s \times 1$. Nach Satz 3.7 ist s damit étale, also mit Satz 3.8 gleichzeitig abgeschlossene und offene Immersion. □

Die folgende Eigenschaft von étalen Morphismen erinnert an die Überlagerungen, die wir aus der Topologie kennen:

[3]Einen Abschnitt über Garben von Differentialen findet man in [14], II.8

Korollar 3.10. *Seien Y_1 und Y_2 zwei separierte étale X-Schemata und Y_1 außerdem zusammenhängend. Falls zwei Morphismen $f, g : Y_1 \to Y_2$ an einem Punkt $y \in Y_1$ übereinstimmen, sodass auch die Abbildungen zwischen den Restklassenkörpern an den Punkten y und $f(y)$ übereinstimmen, gilt $f = g$.*

Beweis. Sei $p_1 : Y_1 \times_X Y_2 \to Y_1$ die Projektion auf die erste Komponente. Dann sind durch die Graphen $\Gamma_f, \Gamma_g : Y_1 \to Y_1 \times_X Y_2$ zwei Schnitte von p_1 gegeben, die an einem Punkt übereinstimmen. Der Morphismus p_1 ist als Basiswechsel von $Y_2 \to X$ étale, und damit folgt aus dem vorherigen Satz $\Gamma_f = \Gamma_g$. Die Morphismen f bzw. g ergeben sich aus dem Graphen durch Zusammensetzen mit der Projektion $p_2 : Y_1 \times_X Y_2 \to Y_2$ auf die zweite Komponente, also gilt damit auch $f = g$. □

3.4 Definition der Fundamentalgruppe

Einen kurzen Abschnitt über die Fundamentalgruppe findet man im Buch von Milne [29], Chapter I, §5, an dem wir uns hier orientieren; eine vollständige Darstellung mit Beweis gibt es in [30] und natürlich in [13].

Sei X ein zusammenhängendes Schema und $\overline{x}$ ein geometrischer Punkt von X, d. h. ein Morphismus $\operatorname{Spec} K \to X$ mit einem separabel algebraisch abgeschlossenen Körper K. Ein geometrischer Punkt ist mit anderen Worten ein Punkt x von X zusammen mit einer Einbettung $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} \to K$. Wir bezeichnen mit FEt/X die Kategorie der étalen Überlagerungen $Y \to X$ und definieren einen Funktor $F : \mathrm{FEt}/X \to \mathit{Ens}$ durch $F(Y) = \operatorname{Hom}_X(\overline{x}, Y)$. Ein Element aus $F(Y)$ ist ein Punkt $y \in Y$ über x zusammen mit einem $\kappa(x)$-Homomorphismus $\kappa(y) \to \kappa(\overline{x}) = K$.

Für ein Objekt $Y \in \mathrm{FEt}/X$ sei $\operatorname{Aut}_X(Y)$ die Gruppe von X-Automorphismen von Y, die von rechts auf Y operiert. Die Gruppe operiert dann ebenfalls von rechts auf $F(Y)$. Falls Y zusammenhängend ist, ist die Abbildung $\operatorname{Aut}_X(Y) \to F(Y)$, $\sigma \mapsto \sigma \circ g$, nach Korollar 3.10 für jedes Element $g \in F(Y)$ injektiv.

Definition. Ein zusammenhängendes Schema Y aus FEt/X heißt galoissch über X, wenn $\operatorname{Aut}_X(Y)$ transitiv auf $F(Y)$ operiert. Für jedes $g \in F(Y)$ ist die durch $\operatorname{Aut}_X(Y) \to F(Y)$, $\sigma \mapsto \sigma \circ g$ definierte Abbildung in diesem Fall also bijektiv.

Definition. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathit{Ens}$ ein Funktor. Dann heißt $\mathcal{G}$ pro-darstellbar, wenn ein projektives System $(X_i, \varphi_{ij})_{i \in I}$ in $\mathcal{C}$ mit Objekten $f_i \in \mathcal{G}(X_i)$ für jedes i existiert, sodass gilt

- $f_i = \mathcal{G}(\varphi_{ij})(f_j)$ für $i \leq j$
- Für jedes Objekt Z aus $\mathcal{C}$ ist die natürliche Abbildung

$$\varinjlim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Z) \to \mathcal{G}(Z)$$

bijektiv.

Satz 3.11. *Der Funktor F ist pro-darstellbar.*

Wir können sogar ein projektives System (X_i, φ_{ij}) in FEt/X angeben, das den Funktor darstellt: Als Objekte X_i wählt man aus jeder Isomorphieklasse von galoisschen étalen Überlagerungen von X einen Vertreter aus. Für jedes X_i wählt man wiederum einen geometrischen

Punkt f_i aus $F(X_i)$. Die Ordnung auf der Indexmenge I ergibt sich nun von allein: Falls es einen Morphismus $\varphi_{ij} : X_j \to X_i$ gibt, der verträglich mit der Wahl der geometrischen Punkte ist, also für den $f_i = \varphi_{ij} \circ f_j$, ist dieser Morphismus eindeutig bestimmt. In diesem Fall soll also $i \leq j$ gelten.

Die Objekte X_i bilden zusammen mit den Morphismen φ_{ij}, die sich so ergeben, ein projektives System, durch das der Funktor F dargestellt wird. Zu je zwei Objekten X_i und X_j ist $X_k = X_i \times_X X_j$ ebenfalls galoissche étale Überlagerung mit durch die Projektionen gegebenem geometrischen Punkt. Durch das Faserprodukt erhält man also einen Index $k \in I$ mit $k \geq i$ und $k \geq j$.

Es gibt im Allgemeinen kein Objekt in FEt/X, das den Funktor F darstellt, aber der Satz sagt uns, dass F immerhin pro-darstellbar ist. Als Fundamentalgruppe wählen wir also statt der Automorphismengruppe eines darstellenden Objekts für F die Automorphismengruppe dieses projektiven Systems:

Für $i \leq j$ können wir eine Abbildung $\psi_{ij} : \mathrm{Aut}_X(X_j) \to \mathrm{Aut}_X(X_i)$ definieren durch $\psi_{ij}(\sigma) \circ f_i = \varphi_{ij} \circ \sigma \circ f_j$ für $\sigma \in \mathrm{Aut}_X(X_j)$. Durch diese Angaben sind die Abbildungen eindeutig definiert und existieren, da die Objekte X_i als galoissch gewählt wurden.

Das folgende Diagramm ist also für alle i, j kommutativ,

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\psi_{ij}(\sigma)} & X_i \\ {\scriptstyle\varphi_{ij}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\varphi_{ij}} \\ X_j & \xrightarrow{\sigma} & X_j \end{array}$$

und die Abbildungen sind tatsächlich Gruppenhomomorphismen.

Definition. Die algebraische Fundamentalgruppe von X ist definiert als der Limes

$$\pi_1(X, \overline{x}) = \varprojlim \mathrm{Aut}_X(X_i)$$

mit den Übergangsabbildungen ψ_{ij}.

3.5 Etale Überlagerungen von normalen Schemata

Die Fundamentalgruppe, die uns interessieren wird, ist die des affinen Schemas $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}\backslash\{(p)\}$. Deshalb überlegen wir uns zunächst etwas allgemeiner, was das Ergebnis im Fall eines normalen Schemas ist.

Beweise für die folgenden zwei Sätze gibt es in [36], Chapitre IV, Corollaire 2 bzw. in [29], Proposition 3.17. Einen Abschnitt über étale Überlagerungen von normalen Schemata findet man in SGA 1 ([13], §I.10).

Satz 3.12 (Spezialfall von Zariskis Hauptsatz für affine Schemata). *Sei B eine quasi-endliche A-Algebra, über jedem Primideal von A liegen also nur endlich viele Primideale von B. Sei A' der ganze Abschluss von A in B. Dann ist die Abbildung $\mathrm{Spec}\,B \to \mathrm{Spec}\,A'$ eine offene Immersion.*

Satz 3.13. *Sei $f : Y \to X$ étale. Falls X ein normales Schema ist, ist auch Y normal.*

Satz 3.14. *Die zusammenhängenden étalen Überlagerungen eines zusammenhängenden normalen Schemas X mit Funktionenkörper K sind genau die Normalisierungen von X in den Körpern L, sodass L endliche separable Körpererweiterung von K ist und die Normalisierung unverzweigt über X ist.*

Beweis. Wir brauchen den Satz nur für den Fall, dass X affin ist und beweisen deshalb nur diesen Spezialfall. Die allgemeine Aussage findet man in [13], Corollaire 10.2 in Kapitel I.

Falls $X = \operatorname{Spec} A$, ist $Y = \operatorname{Spec} B$ ebenfalls affin mit einer endlichen A-Algebra B. Nach Satz 3.12 ist Y mit den Bezeichnungen aus diesem Satz ein offenes Unterschema von $\operatorname{Spec} A'$. Da Y auch endlich über $\operatorname{Spec} A'$ ist, ist der Morphismus $Y \to \operatorname{Spec} A'$ abgeschlossen. Y ist also ein irreduzibles Unterschema von $\operatorname{Spec} A'$. $\operatorname{Spec} B$ ist nach Satz 3.13 normal und damit ist B nullteilerfrei, sodass auch A' nullteilerfrei und $\operatorname{Spec} A'$ deshalb selbst irreduzibel ist. Damit gilt $Y = \operatorname{Spec} A'$.

Umgekehrt müssen wir zeigen, dass diese Morphismen $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A'$ wirklich étale Überlagerungen sind. Für den ganzen Abschluss B eines normalen noetherschen Integritätsbereichs A in einer endlichen separablen Körpererweiterung von $\operatorname{Quot}(A)$ gilt, dass B als A-Modul endlich erzeugt ist. ([9], Proposition 13.14) Als A-Algebra hat B die Form $B = A[b_1, \ldots, b_s]$, und da b_{i+1} jeweils ganz über $A[b_1, \ldots, b_i]$ ist, ist $A[b_1, \ldots, b_{i+1}]$ flache $A[b_1, \ldots, b_i]$-Algebra. Damit ist B flache A-Algebra, und nach Voraussetzung ist B unverzweigt über A. $\square$

Beispiel 3.15. Die étalen Überlagerungen von $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}\backslash\{(p)\}$ sind genau die Spektren von Normalisierungen B von $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ in endlichen, außerhalb von p unverzweigten Körpererweiterungen L von $\mathbb{Q}$.

Beweis. Für eine solche Normalisierung B ist der Morphismus $\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}\backslash(p)$ die Einschränkung der Abbildung $\psi : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_L \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ auf das offene Unterschema $\operatorname{Spec} B = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_L[\frac{1}{p}]$.

Der Morphismus φ ist also genau dann unverzweigt, wenn ψ an allen Punkten, die nicht über (p) liegen, unverzweigt ist. Das ist offenbar genau dann der Fall, wenn die Körpererweiterung $L \supset \mathbb{Q}$ an allen von p verschiedenen Stellen unverzweigt ist. $\square$

Lemma 3.16. *Die galoisschen étalen Überlagerungen sind unter diesen Überlagerungen genau diejenigen, für die die Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$ galoissch ist.*

Beweis. Die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(\operatorname{Spec} B)$ ist kanonisch isomorph zu $\operatorname{Aut}_{\mathbb{Q}}(L)$: Durch Übergang zu den Homomorphismen am generischen Punkt von $\operatorname{Spec} B$ erhält man aus jedem Element von $\operatorname{Aut}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(\operatorname{Spec} B)$ einen Automorphismus von L. Umgekehrt bildet jeder Automorphismus von L den Unterring B als ganzen Abschluss von $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ wieder in sich selbst ab und liefert durch Einschränken einen Automorphismus von B über $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ und damit einen Automorphismus von $\operatorname{Spec} B$ über $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$.

Die Operation von $\operatorname{Aut}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} B)$ auf $F(\operatorname{Spec} B) = \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} \overline{\mathbb{Q}}, \operatorname{Spec} B)$ entspricht dabei der zugehörigen Operation von $\operatorname{Aut}_{\mathbb{Q}}(L)$ auf $\operatorname{Hom}_A(B, \overline{\mathbb{Q}})$. Die Gruppe $\operatorname{Aut}_{\mathbb{Q}}(L)$ operiert aber bekanntlich genau dann transitiv auf $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(L, \overline{\mathbb{Q}})$, wenn die Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$ galoissch ist. $\square$

Satz 3.17. *Die algebraische Fundamentalgruppe von* $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}\backslash(p)$ *ist die Galoisgruppe der maximalen außerhalb von p unverzweigten Erweiterung von $\mathbb{Q}$.*

Beweis. Das projektive System von Überlagerungen, das unseren Funktor darstellt, besteht in diesem Fall aus den Überlagerungen $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$, wobei B der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ in einer endlichen separablen außerhalb p unverzweigten Körpererweiterung L von $\mathbb{Q}$ ist. Die Automorphismengruppen sind jeweils isomorph zur Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q})$, und die Übergangshomomorphismen entsprechen den kanonischen Abbildungen zwischen den Galoisgruppen. Als Limes erhalten wir also die Galoisgruppe der maximalen außerhalb von p unverzweigten Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$. $\square$