4 Arithmetische Topologie

Eine Untersuchung der étalen Kohomologiegruppen[4] von $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ für Zahlkörper K liefert im Wesentlichen das Resultat, dass es sich bei diesen Schemata um dreidimensionale Objekte handelt.[5] Genauer hat man für total imaginäre Zahlkörper den folgenden Satz ([27]):

Satz 4.1. *Sei X das Spektrum des Ganzheitsrings in einem total imaginären Zahlkörper K, $\mathbb{G}_m$ die multiplikative Gruppe des Körpers. Dann gilt*

$$\begin{aligned} H^0(X,\mathbb{G}_m) &= \mathcal{O}_K^*, \\ H^1(X,\mathbb{G}_m) &= \mathrm{Cl}(K), \\ H^2(X,\mathbb{G}_m) &= 0, \\ H^3(X,\mathbb{G}_m) &= \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \\ H^q(X,\mathbb{G}_m) &= 0, \quad \textit{falls } q > 3. \end{aligned}$$

Wenn K nicht total imaginär ist, gilt bis auf $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Torsion ein ähnliches Resultat ([28], Prop. 2.1). Für $K = \mathbb{Q}$ haben wir zum Beispiel

$$\begin{aligned} H^0(\operatorname{Spec}\mathbb{Z},\mathbb{G}_m) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ H^1(\operatorname{Spec}\mathbb{Z},\mathbb{G}_m) &= H^2(\operatorname{Spec}\mathbb{Z},\mathbb{G}_m) = 0, \\ H^3(\operatorname{Spec}\mathbb{Z},\mathbb{G}_m) &= \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

und wenn wir $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Torsion in den höheren Dimensionen ignorieren oder zu 2 teilerfremde Torsionskoeffizienten wählen, ist $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ ebenfalls ein dreidimensionales Objekt.

Zusätzlich folgt aus Satz 3.14 und dem Satz von Minkowski, dass die algebraische Fundamentalgruppe von $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ die triviale Gruppe ist; in topologischer Sprechweise ist $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ also einfach zusammenhängend. Wenn man die étale Kohomologie als Äquivalent der topologischen Kohomologietheorien auffasst, fällt auf, dass Objekte wie $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ mit den hier aufgeführten Eigenschaften bereits seit Poincaré gerne verdächtigt werden, auszusehen wie eine 3-Sphäre.

Für das Spektrum eines Körpers stimmt die étale Kohomologie mit der Galoiskohomologie des Körpers überein ([29], III.1 Ex. 1.7). Da die absolute Galoisgruppe eines endlichen Körpers die kohomologische Dimension 1 hat ([40], Chap. II, §3.3), werden die abgeschlossenen Punkte $\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q = \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} \subset \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ als eindimensionale Objekte angesehen, die mit einem Kreis S^1 verglichen werden können.

Als Anmerkung zu seinem Artikel [27] über étale Kohomologie von Zahlkörpern notierte sich B. Mazur, dass man das Entfernen eines Primideals aus $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ als Analogon eines Knotenkomplements in S^3 auffassen kann. Ihm fiel ebenfalls auf, dass die Definition des Alexanderpolynoms in ähnlicher Form in der Iwasawatheorie wieder auftaucht. Diese und weitere Analogien zwischen Objekten in der Topologie und Objekten in der Zahlentheorie, die schon in den 60er Jahren bemerkt wurden, erschienen allerdings zunächst in keiner Veröffentlichung.

Aufgegriffen und ergänzt wurden die Ideen vor einigen Jahren in einem Vortrag von M. Kapranov und A. Reznikov am MPI, in dem die erste Version eines „Wörterbuchs“ vorgestellt wurde, das einige Objekte aus Knotentheorie und Zahlentheorie, die als Entsprechungen angesehen werden, auflistet. Das so entstandene Gebiet wurde von Reznikov auf den Namen

[4]Eine Einführung in die étale Kohomologie findet man in [29].

[5]J. Neukirch gibt in seinem Übersichtsartikel [31] eine Begründung dafür, dass dieses Resultat anschaulich das richtige ist.

„Arithmetische Topologie" getauft. Seitdem sind verschiedene Versionen des Wörterbuchs erschienen: die grundlegende Fassung findet man im Preprint [37], weitere Ergänzungen in [42], [38], [35] oder [8].

4.1 Wörterbuch, Teil 1

Für eine detaillierte Gegenüberstellung der Objekte und Ergebnisse aus den ersten zwei Kapiteln wählen wir hier ebenfalls die Form eines solchen Wörterbuchs.

Topologie	**Zahlentheorie**
• S^3	• $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$
• Knoten	• Primzahlen
• Verschlingungen	• natürliche Zahlen

Wie in der Einleitung zu diesem Kapitel beschrieben, hat die Kohomologie von $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ genau wie die der 3-Sphäre die Eigenschaft, dass sie nur in den Dimensionen 0 und 3 nicht verschwindet.[6] Knoten und Primzahlen, also genauer S^1 und $\operatorname{Spec}\mathbb{F}_p$, sind eindimensionale Objekte, die sich jeweils in diese größeren Objekte einbetten lassen. Aus diesen eindimensionalen Objekten setzen sich Verschlingungen und natürliche Zahlen zusammen.

• Geschlossene orientierbare zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeiten M	• $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ für Zahlkörper K
• Einbettungen von S^1 in M, also Knoten in M	• Primideale in $\mathcal{O}_K$
• Verschlingungen in M	• Ideale in $\mathcal{O}_K$

Allgemeiner stellt man einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit das Spektrum des Ganzheitsrings $\mathcal{O}_K$ eines Zahlkörpers gegenüber.[7] In diesem Fall erhält man anstelle von Primzahlen die Primideale der Höhe 1 in $\mathcal{O}_K$. Die Ideale, die sich aus diesen Primidealen zusammensetzen, stehen im allgemeineren Fall statt der ganzen Zahlen für Verschlingungen in einer Mannigfaltigkeit.

• zusammenhängende Überlagerungen von M	• unverzweigte Körpererweiterungen von K
• S^3 hat keine nichttriviale zusammenhängende Überlagerung	• $\mathbb{Q}$ hat keine nichttriviale unverzweigte Erweiterung

[6] mit Koeffizienten in $\mathbb{G}_m$ wie oben bemerkt nur bis auf $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Torsion

[7] In der neueren Version [38] des Wörterbuchs nennt A. Reznikov als Entsprechungen von Zahlkörpern so genannte „$3\frac{1}{2}$-Mannigfaltigkeiten". Wie [35] und [42] orientieren wir uns aber an der einfacheren Fassung [37].

Den zusammenhängenden Überlagerungen einer Mannigfaltigkeit entsprechen nach Kapitel 3 die zusammenhängenden étalen Überlagerungen von $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$. Diese sind nach Satz 3.14 genau die Morphismen $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_L \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ für unverzweigte Körpererweiterungen L/K. Wie die 3-Sphäre besitzt $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ keine nichttriviale Überlagerung, ist also „einfach zusammenhängend".

• Knotenkomplement C	• $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$

Das Knotenkomplement erhält man durch Entfernen eines eingebetteten Kreises aus der 3-Sphäre. Wenn man einen abgeschlossenen Punkt (p) aus $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ entfernt, erhält man das offene Unterschema $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$.

• maximale abelsche Überlagerung C_∞ des Knotenkomplements	• zyklotomische $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$

Einer zusammenhängenden Überlagerung des Knotenkomplements entspricht eine zusammenhängende étale Überlagerung von $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$. Diese Überlagerungen entsprechen wiederum den p-verzweigten Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ (Beispiel 3.15). Der maximalen abelschen Überlagerung eines Knotenkomplements wird also die maximale abelsche außerhalb von p unverzweigte Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zugeordnet. Der p-Anteil dieser Erweiterung, also die maximale abelsche p-verzweigte p-Erweiterung von $\mathbb{Q}$, ist nach Satz 2.10 die zyklotomische $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$.

• Knotengruppe G	• Galoisgruppe G der maximalen p-verzweigten p-Erweiterung von $\mathbb{Q}$
• Decktransformationsgruppe D der maximalen abelschen Überlagerung	• Galoisgruppe Γ der zyklotomischen $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$
• $D = G^{ab} \cong \mathbb{Z}$	• $\Gamma = G^{ab} \cong \mathbb{Z}_p$

Die Knotengruppe eines Knotens ist nach Definition die Fundamentalgruppe des Knotenkomplements. Nach Satz 3.17 ist die Galoisgruppe G genau der maximale Pro-p-Quotient der algebraischen Fundamentalgruppe des korrespondierenden Schemas $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}\backslash\{(p)\} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$. Die Rolle der Decktransformationsgruppe, also der Automorphismengruppe von C_∞ über C, übernimmt die Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$, also die Automorphismengruppe von $\mathbb{Q}_\infty$ über $\mathbb{Q}$.

Ganz allgemein ersetzt man hier im zahlentheoretischen Fall abstrakte Gruppen durch Pro-p-Gruppen und Untergruppen durch abgeschlossene Untergruppen. Insbesondere wird die Kommutatoruntergruppe durch den Normalteiler ersetzt, der topologisch von den Kommutatoren erzeugt wird. Die Isomorphie $D \cong \mathbb{Z}$ entspricht der Tatsache, dass Γ eine freie Pro-p-Gruppe mit einem Erzeuger ist.

• $(G')^{ab} = H_1(C_\infty)$	• $(G')^{ab} = \operatorname{Gal}(M_p(\mathbb{Q}_\infty)/\mathbb{Q}_\infty) = G_p^{ab}(\mathbb{Q}_\infty)$
• $\mathbb{Z}[D] \cong \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$	• $\mathbb{Z}_p[\![\Gamma]\!] \cong \mathbb{Z}_p[\![T]\!]$

Bildet man den Quotienten von G' nach der Kommutatoruntergruppe G'', so erhält man die erste Homologiegruppe der maximalen abelschen Überlagerung von C bzw. die Galoisgruppe der maximalen abelschen p-verzweigten p-Erweiterung von $\mathbb{Q}_\infty$.

Der Gruppenring über G^{ab} wird im ersten Fall mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ gebildet und im zweiten Fall als vollständiger Gruppenring (§2.4) mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_p$. Einen Isomorphismus zwischen dem Gruppenring und dem Laurent-Polynomring $\mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ bzw. dem Potenzreihenring $\mathbb{Z}_p[\![T]\!]$ erhält man durch Wahl eines Erzeugers von D bzw. eines topologischen Erzeugers von Γ (Satz 2.16). Die Gruppe G^{ab} operiert in beiden Situationen auf G'^{ab} und macht damit die korrespondierenden Objekte $H_1(C_\infty)$ und $G_p^{ab}(\mathbb{Q}_\infty)$ jeweils zu einem Modul über dem Gruppenring.

• Operation von T auf $H_1(C_\infty)$ • $p_T(T) = \Delta_0(H_1(C_\infty))$	• Operation von T auf $G_p^{ab}(\mathbb{Q}_\infty)$ • $p_T(T) = \Delta_0(G_p^{ab}(\mathbb{Q}_\infty)) = Z_{\mathbb{Q},p}(T)$

Das Element T aus dem Gruppenring induziert jeweils einen Automorphismus des Moduls und damit auch einen Automorphismus des endlichdimensionalen Vektorraums, den man durch Tensorieren mit $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{Q}_p$ erhält. Das charakteristische Polynom ist nach Satz 1.4 bis auf Multiplikation mit einer Einheit das nullte Fitting-Ideal des jeweiligen Moduls. Für den Knoten erhält man als Invariante das Alexanderpolynom, für die Galoisgruppe ist das Resultat die Iwasawa-Zetafunktion.